大成算経における判別式の求め方 (数学史の研究)

後藤, 武史

数理解析研究所講究録 1257 巻 2002 年 186-197

大成算經における判別式の求め方

東京理科大学 理学研究科　後藤 武史 (Takefumi Goto)
Graduate School of Science,
Science University of Tokyo.

0 はじめに

『大成算經』において、巻之一から巻之三までを前集と呼んでいる。そこでは、主に「五技」について述べられている。ここで「五技」とは、加減乗除と開方の5つの技のことである。開方とは、方程式のことである。

巻之一では、基本的な五技の方法を述べている。加減乗除の計算にはそろばん、開方の計算には算木を使用して説明している。

巻之二では、「雑技」と称して、乗、除、開方の遺法の説明をしている。遺法とは、「常には用いないがたまに功をなす方法である」と本文中で述べている。具体的には、乗 (除) の遺法とは、特別な場合における乗 (除) の計算方法である。開方は、巻之一では $x^2 = a$ というような単純な開平方や開立方の式を扱っているのに対し、この巻之二の開方では、x の係数が 0 でない 2 次方程式も扱っている。また、開方の計算方法も多少違っていて、定数項が左辺にある形をとっており、a の符号を変えて、$x^2 + bx - a = 0$ のような形で計算をしている。それにより、2 次方程式を正しく解くことができるのである。

巻之三では、加減、乗除、開方の「変技」について述べている。加減、乗除の「変技」では、「綴求」と「括求」について説明している。「綴求」とは、並べたままに計算をすることであり、「括求」とは、まとめた後に計算をすることである。例えば、加減の複合問題であれば、正負の項の区別無しに並べたまま計算するのが「綴求」であり、正の項と負の項それぞれをまとめた後に減法を施すのが「括求」である。乗除の複合問題であれば、除数と被除数をそれぞれまとめた後に除法を施すのが「括求」である。本文には「括求の方が理に適っているので、こちらを一般的に使う」と記されている。

「開方」では、まず「開出総法」として、一般的な高次方程式を解く方法を述べている。これにより、どのような方程式に関しても解くことができるのである。その後に、大成算經における判別式とも言える「適尽方級法」が述べられてるのである。

1 適尽方級法の定義

關の著書で、「適尽方級法」について述べているものは、『大成算經』の他に『開方翻変』がある。『開方翻変』が著されたのが1683年、『大成算經』は1683年夏から1710年頃にかけて編集されたものであるから、時期的に『開方翻変』の方が『大成算經』よりも早く書かれたと思われる。そのため、若干ながら内容に違いがある。

『開方翻変』においては、n次方程式を

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = 0 \tag{1}$$

としたとき、これをそのまま前式、

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1} = 0 \tag{2}$$

を後式として、これらの2式から『解伏題之法』の方法でxを消去して得られる終結式を、「適尽方級法」と定義している。

一方、『大成算經』においては、同じn次方程式$f(x)$に関して、

$$nf(x) - xf'(x) = na_0 + (n-1)a_1x + \cdots + 2a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-1} = 0 \tag{3}$$

を前式、

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1} = 0 \tag{4}$$

を後式として、これらの『解伏題之法』の方法でxを消去して得られる終結式を、「適尽方級法」と定義している。

ただし、『開方翻変』では「前式一級畳之」とあり、結果として『大成算經』における前式と同じ形に変形してから適尽方級法を計算している。

2 適尽方級法

2次方程式を、

$$f(x) = a + bx + cx^2 = 0$$

としたときの『大成算經』における平方適尽方級法は、

$$4ac - b^2 \tag{5}$$

となっている。ただし、2次方程式や適尽方級法の記号は、ここでは便宜的に、『大成算經』中の実をa、方をb、廉をcと対応させ、現在の表記法

におきかえている。

同様に、3次方程式を、

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 = 0$$

としたときの立方適尽方級法は、

$$-b^2c^2 + 4ac^3 + 4b^3d - 18abcd + 27a^2d^2 \tag{6}$$

4次方程式を、

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 = 0$$

としたときの三乗方適尽方級法は、

$$\begin{aligned} &b^2c^2d^2 - 4ac^3d^2 - 4b^3d^3 + 18abcd^3 - 27a^2d^4 - 4b^2c^3e + 16ac^4e \\ &+18b^3cde - 80abc^2de - 6ab^2d^2e + 144a^2cd^2e - 27b^4e^2 + 144ab^2ce^2 \\ &-128a^2c^2e^2 - 192a^2bde^2 + 256a^3e^3 \end{aligned} \tag{7}$$

5次方程式を、

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 = 0$$

としたときの四乗方適尽方級法は、

$$\begin{aligned} &b^2c^2d^2e^2 - 4ac^3d^2e^2 - 4b^3d^3e^2 + 18abcd^3e^2 - 27a^2d^4e^2 - 4b^2c^3e^3 \\ &+16ac^4e^3 + 18b^3cde^3 - 80abc^2de^3 - 6ab^2d^2e^3 + 144a^2cd^2e^3 \\ &-27b^4e^4 + 144ab^2ce^4 - 128a^2c^2e^4 - 192a^2bde^4 + 256a^3e^5 \\ &-4b^2c^2d^3f + 16ac^3d^3f + 16b^3d^4f - 72abcd^4f + 108a^2d^5f \\ &+18b^2c^3def - 72ac^4def - 80b^3cd^2ef + 356abc^2d^2ef + 24ab^2d^3ef \\ &-630a^2cd^3ef - 6b^3c^2e^2f + 24abc^3e^2f + 144b^4de^2f - 746ab^2cde^2f \\ &+560a^2c^2de^2f + 1020a^2bd^2e^2f - 36ab^3e^3f + 160a^2bce^3f \\ &-1600a^3de^3f - 27b^2c^4f^2 + 108ac^5f^2 + 144b^3c^2df^2 - 630abc^3df^2 \\ &-128b^4d^2f^2 + 560ab^2cd^2f^2 + 825a^2c^2d^2f^2 - 900a^2bd^3f^2 \\ &-192b^4cef^2 + 1020ab^2c^2ef^2 - 900a^2c^3ef^2 + 160ab^3def^2 \\ &-2050a^2bcdef^2 + 2250a^3d^2ef^2 - 50a^2b^2e^2f^2 + 2000a^3ce^2f^2 \\ &+256b^5f^3 - 1600ab^3cf^3 + 2250a^2bc^2f^3 + 2000a^2b^2df^3 \\ &-3750a^3cdf^3 - 2500a^3bef^3 + 3125a^4f^4 \end{aligned} \tag{8}$$

ただし、『大成算經』中の四乗方適尽方級法には、$-80abc^2de^3$ という項が、$-80abcde^3$ となっている。これは、「冪」という漢字の書き忘れで

あろう。また、$-50a^2b^2e^2f^2$ という項は、 $+50a^2b^2e^2f^2$ となっているが、これは、書き写すときの正負の間違いではないかと考える。

ここで、現代の考え方により平方適尽方級法の符号を検証してみる。一般的な2次方程式

$$f(x) = a + bx + cx^2 = 0$$

の解を α、β としたとき、解と係数の関係より、

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= -\frac{b}{c} \\ \alpha\beta &= \frac{a}{c} \end{aligned}$$

これらを $a =$ 、$b =$ の形に変形して平方適尽方級相乗法 (5) に代入すると、

$$\begin{aligned} D &= 4ac - b^2 \\ &= -c^2(\alpha - \beta)^2 \end{aligned} \tag{9}$$

となり、α、β が実数の時は、$D \leq 0$ である。よって、平方適尽方級法は、差積の2乗として考えた場合の判別式とは符号が逆である。

同様にして、3次から5次までの適尽方級法に関しても検証すると、3次方程式

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 = 0$$

の解を、α、β、γ としたとき、解と係数の関係と立法適尽方級法 (6) より、

$$D = -d^4(\alpha - \beta)^2(\beta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2 \tag{10}$$

よってこれも、差積の2乗として考えた場合の判別式とは符号が逆である。

4次方程式

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 = 0$$

の解を、α、β、γ、δ としたとき、解と係数の関係と三乗方適尽方級法 (7) より、

$$D = e^6(\alpha - \beta)^2(\alpha - \gamma)^2(\alpha - \delta)^2(\beta - \gamma)^2(\beta - \delta)^2(\gamma - \delta)^2 \tag{11}$$

この場合は、α、β、γ、δ が全て実数のときには $D \geq 0$ であるから、差積の2乗として考えた場合の判別式と符号が一致する[1]。

5次方程式

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 = 0$$

[1]2000年の発表では、4次のものは符号が逆であると述べたが誤りである

の解を、α、β、γ、δ、ϵとしたとき、解と係数の関係と四乗方適尽方級法 (8) より、

$$\begin{aligned} D \;=\; & f^8(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2(\alpha-\epsilon)^2(\beta-\gamma)^2(\beta-\delta)^2 \\ & (\beta-\epsilon)^2(\gamma-\delta)^2(\gamma-\epsilon)^2(\delta-\epsilon)^2 \end{aligned} \tag{12}$$

これも、α、β、γ、δ、ϵが全て実数の時には$D \geq 0$であるから、差積の2乗として考えた場合の判別式と符号が一致する。

このように、四乗方適尽方級法の2つの誤りが写し間違いだとすると、現在の判別式とは正負の違いはあるが、2次から5次の方程式の判別式に関して、正しい項が求められていることになる。彼らは、後に述べる「替数」というものに使用するためにこの「適尽方級法」を導きだしたと思われる。そのため、符号はあまり意識していないようである。「替数」とは、解を持たない方程式に関して、係数を替えることで解を持つ方程式に変える方法である。これについては、後に述べるが、このような、解を持たせるために係数を変える方法を生み出しながら、現在でいうところの解と係数の関係に関しては気付いていないようであることは残念である。

3 換式

2の適尽方級法で述べた前式 (3) と後式 (4) から、關がどのようにして方適尽方級法を求めたのかを考えてみる。

『大成算經』には、前式と後式を求めたあとに、「換式」を行い、「交乗」して求めるとある。「交乗」とは、『開方翻変』では「交式斜乗」として紹介されているものであるが、「換式」や「交乗」に関しては巻之十七に載せるとして、説明は省いている。巻之十七には、それらを例を用いて説明している。そこで、「換式」の方法についてここで説明する。

まず、前式 (3) と後式 (4) で、(3) を (4) の最高次の係数倍したものから、(4) を (3) の最高次の係数倍したものを引くことによって、x^{n-1} の項を消去する。つまり、$(3) \times na_n - (4) \times a_{n-1}$ を計算すると、

$$\begin{aligned} n^2a_0a_n \quad & -a_1a_{n-1} + \{n(n-1)a_1a_n - 2a_2a_{n-1}\}x + \cdots \\ & +\{3na_{n-3}a_n - (n-2)a_{n-2}a_{n-1}\}x^{n-3} \\ & \qquad +\{2na_{n-2}a_n - (n-1){a_{n-1}}^2\}x^{n-2} = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

を一式とする。次に、(13) を x 倍したものに、(3) を (4) の最高次から2番目の係数倍したものを加え、(4) を (3) の最高次から2番目の係数倍し

たものを引く。それによって、また、x^{n-1} の項を消去するのである。つまり、$(13)\times x+(3)\times(n-1)a_{n-1}-(4)\times 2a_{n-2}$ を計算すると、

$$\begin{aligned} n(n\ &-1)a_0a_{n-1}-2a_1a_{n-2}\\ &+\{n(n-2)a_1a_{n-1}-4a_2a_{n-2}+n^2a_0a_n\}x+\cdots\\ &\qquad+\{3(n-1)a_{n-3}a_{n-1}-2(n-2){a_{n-2}}^2\}x^{n-3}\\ &\qquad\quad+\{3na_{n-3}a_n-(n-2)a_{n-2}a_{n-1}\}x^{n-2}=0 \end{aligned} \tag{14}$$

を二式とする。次に、(14) を x 倍したものに、(3) を (4) の最高次から 3 番目の係数倍したものを加え、(4) を (3) の最高次から 3 番目の係数倍したものを引く。それによって、また、x^{n-1} の項を消去するのである。つまり、$(14)\times x+(3)\times(n-2)a_{n-2}-(4)\times 3a_{n-3}$ を計算して得たものを三式とする。このように順次計算していき、$n-1$ 式までの $n-2$ 次方程式を作る。そうしてできた、方程式の係数を並べて、$n-1$ 次の行列式を計算する。ここで使用するのが、「交乗」である。これは、現代でいうところの「サラスの方法」と同じようなものである。

ここで、例として、三乗方適尽方級相乗法、つまり、4 次方程式の判別式を求めるとすると、2 つの 3 次方程式 (前式と後式) から x を消去することになるので、換式により 3 つの 2 次方程式を導き、行列式を計算するという流れになる。

そこで、4 次方程式を、

$$f(x)=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4=0$$

とすると、(前式)$=nf(x)-xf'(x)$、(後式)$=f'(x)$ より

$$\begin{cases} 4f(x)-xf'(x) &= 4a+3bx+2cx^2+dx^3=0\cdots(\text{前式})\\ f'(x) &= b+2cx+3dx^2+4ex^3=0\cdots(\text{後式}) \end{cases}$$

(前式) $\times 4e-$ (後式) $\times d$ より

$$(16ae-bd)+2(6be-cd)x+(8ce-3d^2)x^2=0\cdots\cdots(\text{一式})$$

(一式) $\times x+$ (前式) $\times 3d-$ (後式) $\times 2c$ より

$$2(6ad-bc)+4(4ae+2bd-c^2)x+2(6be-cd)x^2=0\cdots(\text{二式})$$

(二式) $\times x+$ (前式) $\times 2c-$ (後式) $\times 3b$ より

$$(8ac-3b^2)+2(6ad-bc)x+(16ae-bd)x^2=0\cdots\cdots(\text{三式})$$

となり、それぞれの係数を並べて3次の行列式を作ると、

$$\begin{vmatrix} 16ae-bd & 2(6be-cd) & 8ce-3d^2 \\ 2(6ad-bc) & 4(4ae+2bd-c^2) & 2(6be-cd) \\ 8ac-3b^2 & 2(6ad-bc) & 16ae-bd \end{vmatrix}$$

となり、これを計算することで、三乗方適尽方級相乗法が得られるわけである。

なお、2000年の発表では、關らはシルベスターと同様の行列式を計算したと受け取れる発言をしたが、それは、誤りであり、以上の方法で求めた行列式を計算したのが正しいと考えられる。

4 係数の違い

しかし、換式によって作られた行列式を実際に計算すると、係数にn^{n-2}だけ多くかけられているものが得られる。

例えば、立方適尽方級相乗法ならば、実際には、

$$-3b^2c^2+12ac^3+12b^3d-54abcd+81a^2d^2$$

が得られ、三乗方適尽方級相乗法ならば、実際には、

$$\begin{aligned}&16b^2c^2d^2-64ac^3d^2-64b^3d^3+288abcd^3-432a^2d^4-64b^2c^3e\\&+256ac^4e+288b^3cde-1280abc^2de-96ab^2d^2e+2304a^2cd^2e\\&-432b^4e^2+2304ab^2ce^2-2048a^2c^2e^2-3072a^2bde^2+4096a^3e^3\end{aligned}$$

が得られることになる。

『大成算經』の巻之十七や『解伏題之法』には、「芟」と「治」の説明がある。これらは、「換式」で得られた行列式を計算する際に、ある行、または列に同じ文字や数字がかけられている場合は、それを取り去って計算してよいというものである。しかし、これらによっても、n^{n-2}という数字をなくすことはできないのである。

この係数の疑問に関しては、文化八年(1811年)に藤田嘉言著した、『開方翻変解』という本に解決の糸口を見出せる。この書は、前出の關の著書である『開方翻変』に、解説を与えたものであるが、その中の、立方適尽方級法の求め方を解説している部分で「換式」を求めた後に、

「換式維乗シ相消テ

$$81a^2d^2-9abcd-9abcd+b^2c^2-36abcd+12b^3d+12ac^3-4b^2c^2$$

括之遍三除シテ得

$$27a^2d^2-18abcd-b^2c^2+4b^3d+4ac^3$$

以正為寄　以負為消」

とある[2]。つまり、行列式を計算する前に n^{n-2} を取り去るのではなく、行列式を計算した後に、共通因数で除するという方法をとっているのである。

5 替数

適尽方級で求めた判別式を使って、解を持たない方程式について、係数を替えることで解を持つ方程式にするのが「替数」である。この「替数」に関しては、『大成算經』において特に細かい段階に分けて説明しているわけではないが、わかりやすく説明するために、それぞれのプロセスごとに分けて、例題を交えながら説明をしていく。

5.1 験商有無

ある方程式があるときに、その方程式が解を持つかどうかを調べる方法が「験商有無」である。手順としては、以下の通りである。

i. 仮に商一算を置く
ii. 元の方程式の式の隅から実級まで掛け算をしてこれを並べる
iii. 元々の方程式の実級と並べた実級が
  iii-a. 同符号 → 商は無し (数の多少によっては有り)
  iii-b. 異符号 → 商有り

ただし、iii-a の場合でも他級が異符号であれば、数を替えることで解を持たせることができるが、各級の符号がすべて同符号であれば、数を替えても解を持たせることはできない。

また、i. にいう「商一算」とは、単純に数字としての「1」「-1」のことではなく、未知数のことであると考えられる。つまり、ある (正, 負の) 商を立てたときに、その商によって各級の数がどのように変化するかを考えるために、「商一算」を立てて符号の違いをみるのである。同符号であれば、実級の数は基本的には減ることはなく、その場合は実級が 0 になることはないからであると考えたためであろう。

ここでこの験商有無の例として、$4-3x+x^2=0$ について考えたとき、仮の正商一算[3]を立て、それと元の廉をかけて方級に置き、また、その方

[2]実際の適尽方級法は、算木と傍書法で書かれているが、ここでは現代的な記号を用いて表すことにする

[3]ここでは符号のみ表記

と仮商をかけて実級に置くと、

原式	所布	
4	+	実
-3	+	方
1	+	廉

このとき、原式の実と所布の実は同符号であるため、「正の商は無し」となる。しかし、数の多少によってはある場合もあるので、実際に開方をしてみるが、不可能であるため、やはり解を持たない。しかし、方級が異符号であるため、替数により解を持たせることが可能である。
一方、仮の負商一算[4]を立てた場合は同じように、

原式	所布	
4	+	実
-3	−	方
1	+	廉

このとき、原式の実と所布の実は同符号であるため、「負の商は無し」となる。さらに、原式と所布の各級の符号が全て同じであるため、替数により、解を持たせることも不可能である。

5.2 替数可能な級

各級について、替数によって商を持たせることが可能であるかどうかは、その級が、所布の式の級と

i. 異符号 → 可能
ii. 同符号
  ii-a その級を 0 とした式が解を持つ → 可能
  ii-b その級を 0 とした式が解を持たない
    → 2 つの級を 0 として, その式が解を持つかを考える

となっている。

ここでこの替数可能な級の例として、先ほどと同じ問題の$4-3x+x^2=0$

[4]ここでは符号のみ表記

について考えてみる。この問題は、験商有無により、替数によって解(正の商)を持たせることが可能である。そこで、どの級に関して替数をするかを考えるために、実、廉に関して、それぞれ1つずつ互いに0に置き換えてみると、

原式	実=0	廉=0	
4	0	4	実
-3	-3	-3	方
1	1	0	廉

実、廉をそれぞれ0に置き換えた式は、明らかに解を持つ。また、方は所布の方と異符号であるので、実、方、廉の全ての級について、それぞれ数を替えることによって商を持たせることが可能である。

5.3 替数

これまでの手順で替えるべき級を明らかにしたところで、実際にその級の数を替える。その場合、それぞれ各式の次数に合った「適尽方級法」を使用する。平方式であれば平方適尽方級法、立方式であれば立方適尽方級法、三乗方式であれば三乗方適尽方級法という風である。その手順は、

i. 替える級を天元の一とする
ii. 適尽方級法により式を得て、それを開除する
iii. 極数(正)を得、その数に従い各級を損益し、式を得る
iv. 次に替える級を天元の一とする

である。ただし、iii. に関して、『開方翻変』には、

iii-a. 実, 隅を替える → 極数以下とする
iii-b. 他の級を替える
iii-b-1. 原式と所布の級が同符号 → 極数以下とする
iii-b-2. 原式と所布の級が異符号 → 極数以上とする

とあるが、大成算經においては、「視極数損益其級数」と述べていて、極数によって上下を考えるとしている。

ここで替数の例として、先ほどと同じ問題の、$4-3x+x^2=0$ について考えてみる。この問題は、実、方、廉の全ての級について、それぞれ数を替えることによって正の商を持たせることが可能である。

原式	
4	実
-3	方
1	廉

○実を替える

正実を天元の一 (x) とし、平方適尽方級法を適用すると、

寄 −	消 =	式	
0	9	-9	実
4	0	4	方

となり、実を方で割ることで、極数 2.25 を得、実を 2.25 以下に替えることで、この方程式は正の商を持つ (実を損する)。

○方を替える

方を天元の一 (x) とすると、負方は、$-x$ で表される。そこで、平方適尽方級法を適用すると、

寄 −	消 =	式	
0	16	-16	実
0	0	0	方
1	0	1	廉

となり、得た式を開除することで、極数 4 を得、方を 4 以上に替えることで、この方程式は正の商を持つ (方を増する)。

○廉を替える

正廉を天元の一 (x) とし、平方適尽方級法を適用すると、

寄	−	消	＝	式		
0		9		-9		実
4		0		4		方

となり、実を方で割ることで、極数 2.25 を得、廉を 2.25 以下に替えることで、この方程式は正の商を持つ (廉を損する)。

6 まとめ

『大成算經』の前集には、基本的な「五技」の計算法から、方程式論までが述べられている。その中では、方程式の一般的な解法だけにとどまらず、行列式を利用して、現代の解釈でいうところの判別式にあたるものまでも計算している。この「適尽方級」を正しく計算していたことから、關や建部兄弟は行列式の計算を正しく行っていたことは明らかである。そこは、十分に評価すべきところであろう。

また、「適尽方級」は、解を持たない方程式に関して解を持たせるための方法である、「替数」を行うために導き出したものであると考えられる。彼らは極数を、「適尽方級」という言葉に表れている通り、方程式が重解を持つための数として捕らえているため、符号についてはあまり意識をしていない。しかし、方程式に解を持たせるための方法であれば、符号を意識するのは当然である。そうすれば、現代で言う所の「解と係数の関係」まで発展したであろうことを推測するのは容易であるため、それに気付かなかったことは大変残念である。